

Αξιολόγηση Ευριστικών Αλγορίθμων



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

- Πολλές φορές η εύρεση της βέλτιστων λύσεων προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού είναι μια χρονοβόρα διαδικασία (εκθετική πολυπλοκότητα)

- Πολλές φορές η εύρεση της βέλτιστων λύσεων προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού είναι μια χρονοβόρα διαδικασία (εκθετική πολυπλοκότητα)
- Υπάρχουν γρήγορες μέθοδοι επίλυσης (πολυωνυμική πολυπλοκότητα) που δεν μας εγγυούνται πως η λύση θα είναι βέλτιστη

- Πολλές φορές η εύρεση της βέλτιστων λύσεων προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού είναι μια χρονοβόρα διαδικασία (εκθετική πολυπλοκότητα)
- Υπάρχουν γρήγορες μέθοδοι επίλυσης (πολυωνυμική πολυπλοκότητα) που δεν μας εγγυούνται πως η λύση θα είναι βέλτιστη
- Αξιολογούμε αυτούς τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους σύμφωνα με το πόσο απέχει η λύση που επιστρέφουν από τη βέλτιστη

Θεωρούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο A και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I

Θεωρούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο A και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I

$f_A(I)$: η λύση που επιστρέφει ο A

$f^*(I)$: η βέλτιστη λύση

Θεωρούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο A και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I

$f_A(I)$: η λύση που επιστρέφει ο A

$f^*(I)$: η βέλτιστη λύση

- απόλυτο λάθος : $\epsilon^\alpha = |f^*(I) - f^A(I)|$

Θεωρούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο A και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I

$f_A(I)$: η λύση που επιστρέφει ο A

$f^*(I)$: η βέλτιστη λύση

- απόλυτο λάθος : $\epsilon^{\alpha} = |f^*(I) - f^A(I)|$
- σχετικό λάθος : $\epsilon^r = \frac{|f^*(I) - f^A(I)|}{f^*(I)}$

Θεωρούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο A και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I

$f_A(I)$: η λύση που επιστρέφει ο A

$f^*(I)$: η βέλτιστη λύση

- απόλυτο λάθος : $\epsilon^A = |f^*(I) - f^A(I)|$
- σχετικό λάθος : $\epsilon^r = \frac{|f^*(I) - f^A(I)|}{f^*(I)}$
- Προσεγγιστικός λόγος (Approximation ratio)
 - Ελαχιστοποίηση : $\rho = \frac{f_A(I)}{f^*(I)} = 1 + \epsilon^r$
 - Μεγιστοποίηση : $\rho = \frac{f^*(I)}{f_A(I)} = \frac{1}{1 - \epsilon^r}$

Θεωρούμε έναν προσεγγιστικό αλγόριθμο A και ένα στιγμιότυπο του προβλήματος I

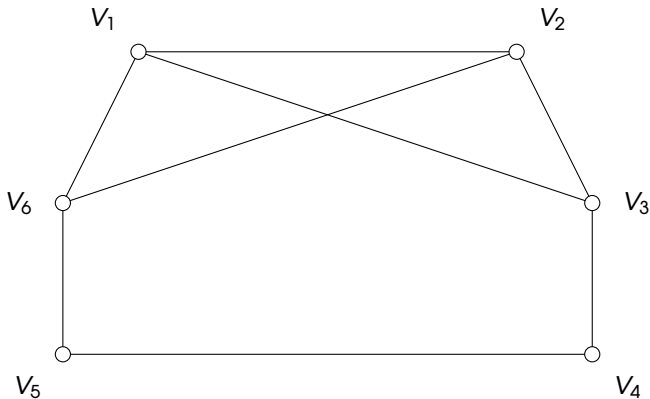
$f_A(I)$: η λύση που επιστρέφει ο A

$f^*(I)$: η βέλτιστη λύση

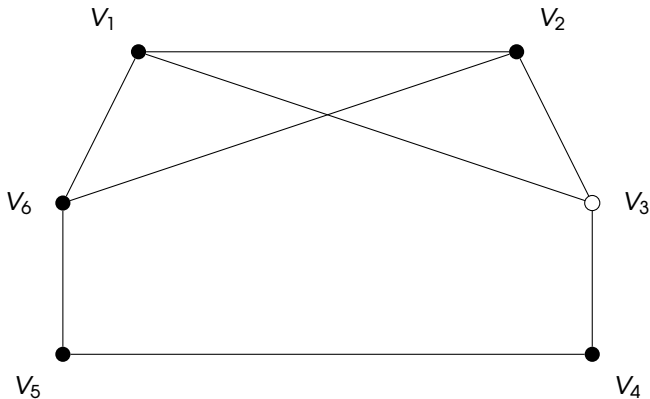
- απόλυτο λάθος : $\epsilon^a = |f^*(I) - f^A(I)|$
- σχετικό λάθος : $\epsilon^r = \frac{|f^*(I) - f^A(I)|}{f^*(I)}$
- Προσεγγιστικός λόγος (Approximation ratio)
 - Ελαχιστοποίηση : $\rho = \frac{f_A(I)}{f^*(I)} = 1 + \epsilon^r$
 - Μεγιστοποίηση : $\rho = \frac{f^*(I)}{f_A(I)} = \frac{1}{1 - \epsilon^r}$
- Διαφορικός λόγος (Differential ratio) :

$$\epsilon^d = \frac{|f_{\text{worst}}(I) - f_A(I)|}{|f_{\text{worst}}(I) - f^*(I)|} = 1 + \epsilon^r$$

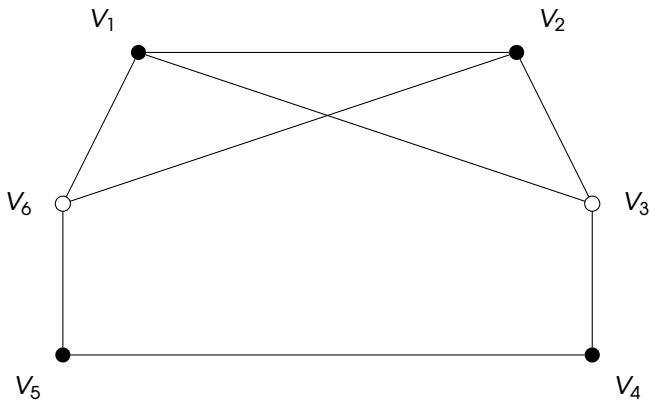
- Δίνεται γράφος $G(V, E)$
- Να βρεθεί υποσύνολο $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $\forall [v_i, v_j] \in E$ είτε $v_i \in V'$ ή $v_j \in V'$
- Επιπλέον θέλουμε ο αριθμός των κόμβων $|V'|$ να είναι ελάχιστος



$$|V| = 6, |E| = 8$$



$$V' = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}, |V^*| = 5$$



$$V^* = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}, |V^*| = 4$$

Βέλτιστη λύση

Input: Γράφος $G(V, E)$

Output: Κάλυψη $V' \subset V$

$V' \leftarrow \emptyset$

while $E \neq \text{emptyset}$ **do**

Επέλεξε $v \in V$ με μέγιστο βαθμό

$V' \leftarrow V' \cup \{v\}$

Διέγραψε όλες τις προσκείμενες στο κόμβο v ακμές από το σύνολο E

end while

- Θεωρούμε ένα παράδειγμα γράφου που αποτελείται από τρεις ομάδες κόμβων

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Θεωρούμε ένα παράδειγμα γράφου που αποτελείται από τρεις ομάδες κόμβων
- $n + 2$ κόμβοι τύπου c , $n + 2$ κόμβοι τύπου b και n κόμβοι τύπου a

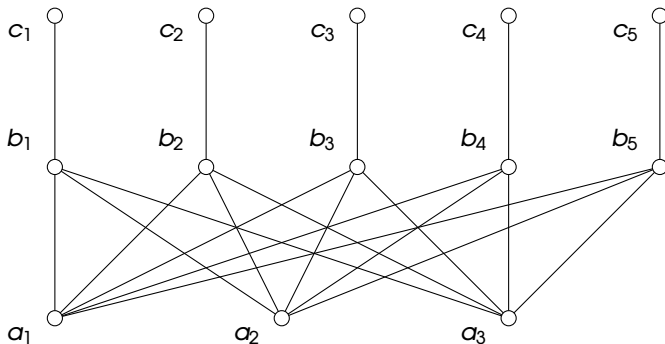
Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Θεωρούμε ένα παράδειγμα γράφου που αποτελείται από τρεις ομάδες κόμβων
- $n + 2$ κόμβοι τύπου c , $n + 2$ κόμβοι τύπου b και n κόμβοι τύπου a
- Κάθε κόμβος c_i είναι συνδεδεμένος μόνο με τον αντίστοιχο κόμβο b_i

- Θεωρούμε ένα παράδειγμα γράφου που αποτελείται από τρεις ομάδες κόμβων
- $n + 2$ κόμβοι τύπου c , $n + 2$ κόμβοι τύπου b και n κόμβοι τύπου a
- Κάθε κόμβος c_i είναι συνδεδεμένος μόνο με τον αντίστοιχο κόμβο b_i
- Κάθε κόμβος b_i είναι συνδεδεμένος με όλους τους κόμβους που ανήκουν στην ομάδα a

- Θεωρούμε ένα παράδειγμα γράφου που αποτελείται από τρεις ομάδες κόμβων
- $n + 2$ κόμβοι τύπου c , $n + 2$ κόμβοι τύπου b και n κόμβοι τύπου a
- Κάθε κόμβος c_i είναι συνδεδεμένος μόνο με τον αντίστοιχο κόμβο b_i
- Κάθε κόμβος b_i είναι συνδεδεμένος με όλους τους κόμβους που ανήκουν στην ομάδα a
- Ο ευριστικός αλγόριθμος δεν επιστρέφει τη βέλτιστη λύση!

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 1



Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 1

- Θέτουμε $n = 3$

- Θέτουμε $n = 3$
- $d(a_i) = 5, i = 1, 2, \dots, n$
- $d(b_i) = 4, i = 1, 2, \dots, n$
- $d(c_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n$

- Θέτουμε $n = 3$
- $d(a_i) = 5, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(b_i) = 4, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(c_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n$
- Βέλτιστη λύση : $|V'| = 5(n + 2)$

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 1

- Θέτουμε $n = 3$
- $d(a_i) = 5, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(b_i) = 4, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(c_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n$
- Βέλτιστη λύση : $|V'| = 5(n + 2)$
- Ευριστικός 1 : $|V| = 8(n + n + 2)$



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΩΣΙΜΗΣ
ΑΝΑΓΩΓΗΣ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΕΡΦΗ
Επαγγελματική Εκπαίδευση και
Κατάρτιση και Βιωματική
Εκπαίδευση

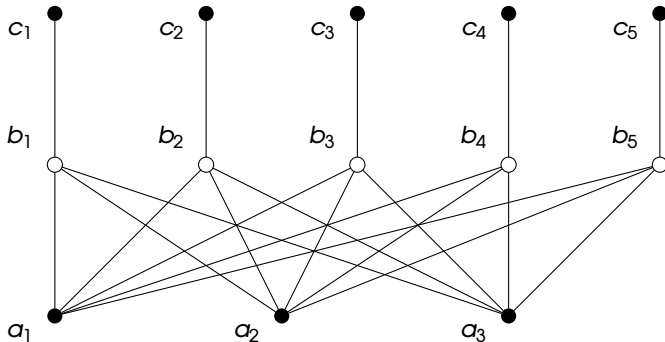
Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 1

- Θέτουμε $n = 3$
- $d(a_i) = 5, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(b_i) = 4, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(c_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n$
- Βέλτιστη λύση : $|V'| = 5(n + 2)$
- Ευριστικός 1 : $|V| = 8(n + n + 2)$
- Προσεγγιστικός λόγος $\rho_1 = \frac{H_1}{Opt} = \frac{2n+2}{n+2} \leftarrow 2$
Λάθος $\epsilon^r = 100\%$



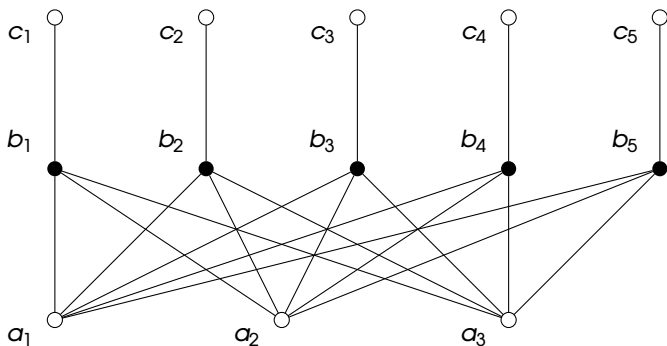
- Θέτουμε $n = 3$
- $d(a_i) = 5, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(b_i) = 4, i = 1, 2, \dots, n$
 $d(c_i) = 2, i = 1, 2, \dots, n$
- Βέλτιστη λύση : $|V'| = 5(n + 2)$
- Ευριστικός 1 : $|V| = 8(n + n + 2)$
- Προσεγγιστικός λόγος $\rho_1 = \frac{H_1}{Opt} = \frac{2n+2}{n+2} \leftarrow 2$
Λάθος $\epsilon^r = 100\%$
- Το λάθος όμως μπορεί να είναι μεγαλύτερο !

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 1



Λύση που επιστρέφει η πρώτη ευριστική μέθοδος

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 1



Βέλτιστη λύση

- Επεκτείνουμε το προηγούμενο παράδειγμα

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Επεκτείνουμε το προηγούμενο παράδειγμα
- Αντί για $n + 2$ κόμβους a προσθέτουμε έναν κόμβο για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση

- Επεκτείνουμε το προηγούμενο παράδειγμα
- Αντί για $n + 2$ κόμβους a προσθέτουμε έναν κόμβο για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση

Για $n = 4$ έχουμε :

- 3 ζευγάρια
- 2 τριάδες
- 1 τετράδα
- 1 πεντάδα

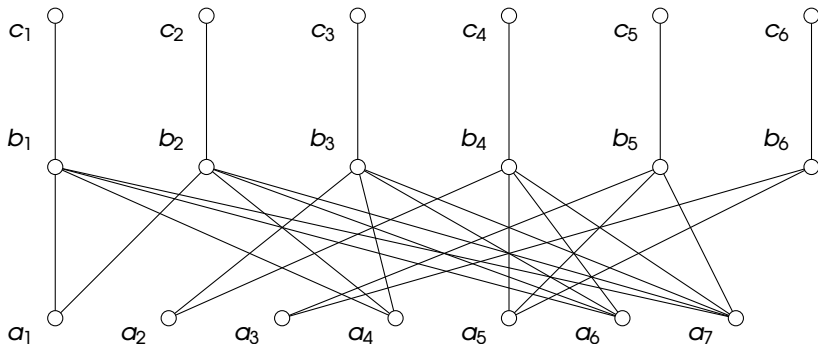
- Επεκτείνουμε το προηγούμενο παράδειγμα
- Αντί για $n + 2$ κόμβους a προσθέτουμε έναν κόμβο για κάθε σύνολο σε κάθε διαμέριση

Για $n = 4$ έχουμε :

- 3 ζευγάρια
- 2 τριάδες
- 1 τετράδα
- 1 πεντάδα

Βέλτιστη λύση : $|V^*| = 6(n + 2)$ Ευριστικός 1 : $|V_1| = 10(n + n + 2)$

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2



Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Ο τελευταίος κόμβος a έχει πάντοτε το μεγαλύτερο βαθμό. Ο αλγόριθμος θα επιλέγει πάντοτε όλους τους κόμβους των ομάδων a και c . Βέλτιστη όμως είναι η επιλογή όλων των κόμβων της ομάδας b .

- Ο τελευταίος κόμβος a έχει πάντοτε το μεγαλύτερο βαθμό. Ο αλγόριθμος θα επιλέγει πάντοτε όλους τους κόμβους των ομάδων a και c . Βέλτιστη όμως είναι η επιλογή όλων των κόμβων της ομάδας b .
- Λύση ευριστικού 1 : $|\{\text{κόμβοι-}a\}| + n = L(n) + n$

$$L(n) = \sum_{j=2}^n \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

- Ο τελευταίος κόμβος a έχει πάντοτε το μεγαλύτερο βαθμό. Ο αλγόριθμος θα επιλέγει πάντοτε όλους τους κόμβους των ομάδων a και c . Βέλτιστη όμως είναι η επιλογή όλων των κόμβων της ομάδας b .

- Λύση ευριστικού 1 : $|\{\text{κόμβοι-}a\}| + n = L(n) + n$

$$L(n) = \sum_{j=2}^n \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

- Βέλτιστη λύση : $|\{\text{κόμβοι-}b\}| = n$

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Ο τελευταίος κόμβος a έχει πάντοτε το μεγαλύτερο βαθμό. Ο αλγόριθμος θα επιλέγει πάντοτε όλους τους κόμβους των ομάδων a και c . Βέλτιστη όμως είναι η επιλογή όλων των κόμβων της ομάδας b .

- Λύση ευριστικού 1 : $|\{\text{κόμβοι-}a\}| + n = L(n) + n$

$$L(n) = \sum_{j=2}^n \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

- Βέλτιστη λύση : $|\{\text{κόμβοι-}b\}| = n$
- Προσεγγιστικός λόγος : $\rho = \frac{n+L(n)}{n}$



Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Ο τελευταίος κόμβος a έχει πάντοτε το μεγαλύτερο βαθμό. Ο αλγόριθμος θα επιλέγει πάντοτε όλους τους κόμβους των ομάδων a και c . Βέλτιστη όμως είναι η επιλογή όλων των κόμβων της ομάδας b .

- Λύση ευριστικού 1 : $|\{\text{κόμβοι-}a\}| + n = L(n) + n$

$$L(n) = \sum_{j=2}^n \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

- Βέλτιστη λύση : $|\{\text{κόμβοι-}b\}| = n$
- Προσεγγιστικός λόγος : $\rho = \frac{n+L(n)}{n}$
- Σχετικό σφάλμα $\epsilon^r = \frac{L(n)}{n}$



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΩΣΙΜΗΣ
ΑΝΑΓΚΗΣ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΕΡΦΗ
Εκπαίδευση, Έρευνα
Εκπαίδευση και Άσκηση
Επενδύοντας στην Κοινωνία

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2

- Ο τελευταίος κόμβος a έχει πάντοτε το μεγαλύτερο βαθμό. Ο αλγόριθμος θα επιλέγει πάντοτε όλους τους κόμβους των ομάδων a και c . Βέλτιστη όμως είναι η επιλογή όλων των κόμβων της ομάδας b .

- Λύση ευριστικού 1 : $|\{\text{κόμβοι-}a\}| + n = L(n) + n$

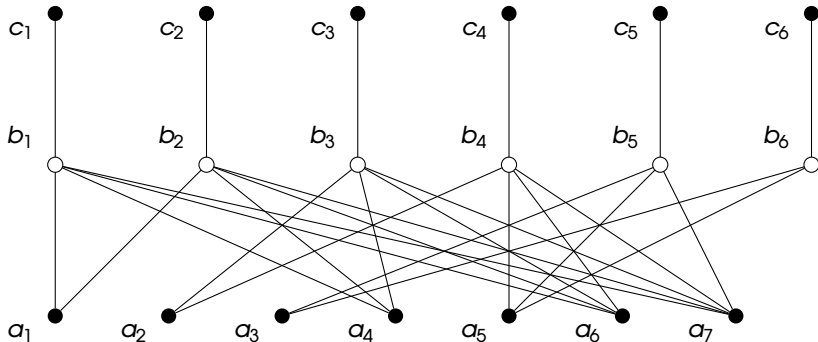
$$L(n) = \sum_{j=2}^n \lfloor \frac{n}{j} \rfloor$$

- Βέλτιστη λύση : $|\{\text{κόμβοι-}b\}| = n$
- Προσεγγιστικός λόγος : $\rho = \frac{n+L(n)}{n}$
- Σχετικό σφάλμα $\epsilon^r = \frac{L(n)}{n}$
- Αύξηση λογαριθμική ($\log n$)

v	6	10	30	100	1000
$(\%) \frac{L(n)}{n}$	117	160	267	380	600

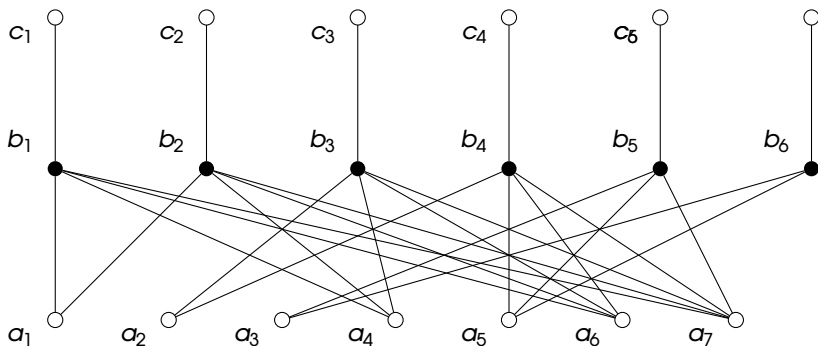


Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2



Λύση ευριστικού αλγορίθμου

Πρώτη ευριστική μέθοδος - Παράδειγμα 2



Βέλτιστη λύση

Input: Γράφος $G(V, E)$

Output: Κάλυψη $V' \subset V$

$V' \leftarrow \emptyset$

while $E \neq \text{emptyset}$ **do**

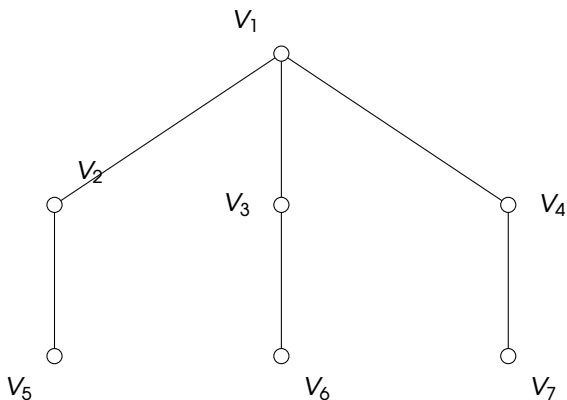
 Διάλεξε μια ακμή $(v, u) \in E$ τυχαία

$V' \leftarrow V' \cup \{v, u\}$

 Διέγραψε τους κόμβους v και u από τον γράφο G

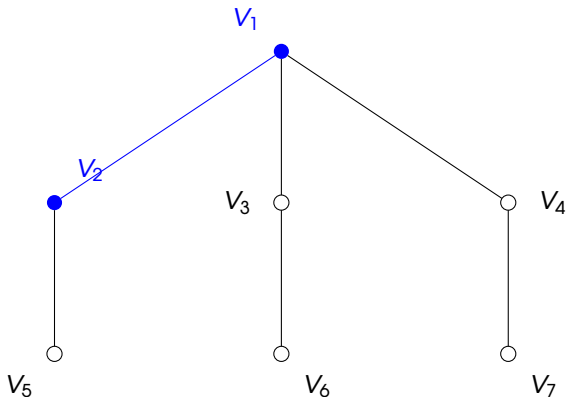
end while

Δεύτερη ευριστική μέθοδος



$$V' = \emptyset$$

Δεύτερη ευριστική μέθοδος



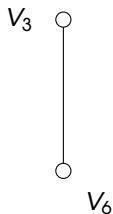
$$V' = \{v_1, v_2\}$$

Δεύτερη ευριστική μέθοδος

V_5



V_3



V_6

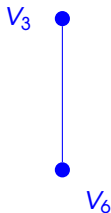
V_4



V_7

$$V' = \{v_1, v_2\}$$

Δεύτερη ευριστική μέθοδος



$$V' = \{V_1, V_2, V_3, V_6\}$$

Δεύτερη ευριστική μέθοδος

V_5

V_4
 V_7

$$V' = \{V_1, V_2, V_3, V_6\}$$



V_5



$$V' = \{V_1, V_2, V_3, V_6, V_4, V_7\}$$

- Κάθε επικάλυψη έχει τουλάχιστον ένα κόμβο από κάθε πλευρά μιας οποιασδήποτε ακμής

- Κάθε επικάλυψη έχει τουλάχιστον ένα κόμβο από κάθε πλευρά μιας οποιασδήποτε ακμής
- Η ευριστική 2 επιστρέφει μια λύση το πολύ δύο φορές μεγαλύτερη

- Κάθε επικάλυψη έχει τουλάχιστον ένα κόμβο από κάθε πλευρά μιας οποιασδήποτε ακμής
- Η ευριστική 2 επιστρέφει μια λύση το πολύ δύο φορές μεγαλύτερη
- Έστω V_2 η κομβική κάλυψη που επιστρέφει η ευριστική 2

- Κάθε επικάλυψη έχει τουλάχιστον ένα κόμβο από κάθε πλευρά μιας οποιασδήποτε ακμής
- Η ευριστική 2 επιστρέφει μια λύση το πολύ δύο φορές μεγαλύτερη
- Έστω V_2 η κομβική κάλυψη που επιστρέφει η ευριστική 2
- Έστω V^* η ελάχιστη κομβική επικάλυψη : $V^* \geq \frac{1}{2} V_2$

- Κάθε επικάλυψη έχει τουλάχιστον ένα κόμβο από κάθε πλευρά μιας οποιασδήποτε ακμής
- Η ευριστική 2 επιστρέφει μια λύση το πολύ δύο φορές μεγαλύτερη
- Έστω V_2 η κομβική κάλυψη που επιστρέφει η ευριστική 2
- Έστω V^* η ελάχιστη κομβική επικάλυψη : $V^* \geq \frac{1}{2} V_2$
- Προσεγγιστικός λόγος : $\rho = \frac{V_2}{V^*} = 2$

- Κάθε επικάλυψη έχει τουλάχιστον ένα κόμβο από κάθε πλευρά μιας οποιασδήποτε ακμής
- Η ευριστική 2 επιστρέφει μια λύση το πολύ δύο φορές μεγαλύτερη
- Έστω V_2 η κομβική κάλυψη που επιστρέφει η ευριστική 2
- Έστω V^* η ελάχιστη κομβική επικάλυψη : $V^* \geq \frac{1}{2} V_2$
- Προσεγγιστικός λόγος : $\rho = \frac{V_2}{V^*} = 2$
- Υπάρχει κακό στιγμιότυπο ώστε να επιτευχθεί λύση δύο φορές μεγαλύτερη;